全品

教辅图书 功能学具 学生之家

基础教育行业专研品牌

30+年创始人专注教育行业

全品高考第二轮专题

考前知识清单

KAOQIANZHISHIQINGDAN

北京专版

数学

主 编 肖德好

CONTENTS 目录

清单 1　集合、常用逻辑用语、不等式

【教材再现】

一、集合

1. 集合中元素的特性

确定性、互异性、无序性.

2. 元素与集合的关系

(1)如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于集合 A，记作 $a\in A$.

(2)如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于集合 A，记作 $a\notin A$.

3. 实数集 **R**、有理数集 **Q**、整数集 **Z**、非负整数集 **N**、正整数集 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$

4. 集合与集合的关系：子集、集合相等、真子集

规定：空集是任何集合的子集，空集是任何非空集合的真子集.

5. 集合间的关系与运算

(1)$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$；$A\cap B=B\Leftrightarrow B\subseteq A$.

(2)子集、真子集个数计算公式

对于含有 n 个元素的有限集合 M，其子集、真子集、非空子集、非空真子集的个数依次为 2^n，2^n-1，2^n-1，2^n-2.

(3)集合运算中的常用方法

若已知的集合是不等式的解集，用数轴求解；若已知的集合是点集，用数形结合法求解；若已知的集合是抽象集合，用 Venn 图求解.

二、常用逻辑用语

1. 全称量词命题、存在量词命题及其否定

(1)全称量词命题：$\forall x\in M$，$p(x)$，它的否定为存在量词命题：$\exists x\in M$，$\neg p(x)$.

(2)存在量词命题：$\exists x\in M, p(x)$，它的否定为全称量词命题：$\forall x\in M, \neg p(x)$.

(3)命题与其否定真假相反.

2. 充分条件与必要条件的判定

第一步：分清楚条件和结论(别忘了)

第二步：判断充要条件(别错了)

(1)充分性

条件 $p\Rightarrow$结论 q

(2)必要性

条件 $p\Leftarrow$结论 q

第三步：下结论

三、不等式

1. 一元二次不等式的解法

第一步：一元二次不等式(方程)标准式

$ax^2+bx+c=0, ax^2+bx+c>0, ax^2+bx+c<0$,

a 是二次项系数，b 是一次项系数，c 是常数项.

第二步：韦达定理

(1)求判别式：$\Delta=b^2-4ac$；

(2)韦达定理：$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, x_1x_2=\frac{c}{a}$.

第三步：解一元二次方程

(1) 公式法解方程

①求判别式：$\Delta=b^2-4ac$；

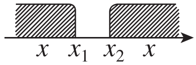
②求方程的根(解)：$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$.

(2)分解因式法解方程

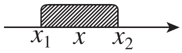
(3)配方法解方程

第四步:判断一元二次不等式的解集

(1) $ax^2+bx+c>0$　大于 0 取两边



(2) $ax^2+bx+c<0$　小于 0 取中间



2. 一元二次不等式的恒成立问题

(1)$ax^2+bx+c>0(a\neq 0)$恒成立的条件是$\begin{cases}a>0,\\ \Delta<0.\end{cases}$

(2)$ax^2+bx+c<0(a\neq 0)$恒成立的条件是$\begin{cases}a<0,\\ \Delta<0.\end{cases}$

3. 分式不等式

$\dfrac{f(x)}{g(x)}>0(<0)\Leftrightarrow f(x)g(x)>0(<0)$;

$\dfrac{f(x)}{g(x)}\geqslant 0(\leqslant 0)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)g(x)\geqslant 0(\leqslant 0),\\ g(x)\neq 0.\end{cases}$

4. 基本不等式

(1)基本不等式:$\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}(a>0,b>0)$,当且仅当 $a=b$ 时,等号成立.

基本不等式的变形:

①$a^2+b^2\geqslant 2ab(a,b\in\mathbf{R})$,当且仅当 $a=b$ 时,等号成立;

②$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\geqslant ab(a,b\in\mathbf{R})$,当且仅当 $a=b$ 时,等号成立.

(2)在利用基本不等式求最值时,要特别注意“拆、拼、凑”等技巧,满足基本不等式中“正”“定”“等”的条件.

【易错提醒】

1. 用描述法表示集合时,一定要理解好集合的含义,抓住集合的代表元素.例如:$\{x|y=\lg x\}$——函数的定义域;$\{y|y=\lg x\}$——函数的值域;$\{(x,y)|y=\lg x\}$——函数图象上的点集.

2. 集合的元素具有确定性、无序性和互异性,在解决有关集合的问题时,尤其要注意元素的互异性.

3. 空集是任何集合的子集.解题时勿漏$\varnothing$的情况.

4. 判断命题的真假要先明确命题的构成.由命题的真假求某个参数的取值范围,还可以从集合的角度来思考,将问题转化为集合间的运算.

5. 解形如$ax^2+bx+c>0(a\neq0)$的一元二次不等式时,易忽视对系数a的讨论导致漏解或错解,要注意分$a>0$,$a<0$进行讨论.

6. 求解分式不等式时应正确进行同解变形,不能把$\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant0$直接转化为$f(x)\cdot g(x)\leqslant0$,而忽视$g(x)\neq0$.

7. 容易忽视使用基本不等式求最值的条件,即“一正、二定、三相等”导致错解.如:求函数$f(x)=\sqrt{x^2+2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$的最值,就不能利用基本不等式求最值;求函数$y=x+\frac{3}{x}(x<0)$的最值时,先转化为正数再求解.

清单 2　复数、平面向量

【教材再现】

一、复数的相关概念及运算法则

1. 复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 的分类

(1)z 是实数$\Leftrightarrow b=0$；

(2)z 是虚数$\Leftrightarrow b\neq 0$；

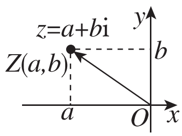
(3)z 是纯虚数$\Leftrightarrow a=0$ 且 $b\neq 0$.

2. 共轭复数

复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 的共轭复数 $\overline{z}=a-bi$.

3. 复数的几何意义

复数 $z=a+bi$ 与复平面内的点 $Z(a,b)$ 一一对应.



4. 复数的模

复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 的模 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

5. 复数相等的充要条件

$a+bi=c+di\Leftrightarrow a=c$ 且 $b=d(a,b,c,d\in\mathbf{R})$.

特别地，$a+bi=0\Leftrightarrow a=0$ 且 $b=0(a,b\in\mathbf{R})$.

6. 复数的加减乘除运算

(1)加法：实部与实部，虚部与虚部分别相加.

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

(2)减法：实部与实部，虚部与虚部分别相减.

$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

(3)乘法：按照代数式乘法展开，遇到 i^2，用 -1 取代.

$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i$

相当于代数式运算

(4)除法：分子分母同乘分母的共轭复数，再展开.

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{(bc-ad)i}{c^2+d^2}(c+di\neq 0)$$

相当于分母有理化

7. 复数的几个常见结论

(1)$(1\pm i)^2=\pm 2i$；

(2)$\frac{1+i}{1-i}=i$，$\frac{1-i}{1+i}=-i$；

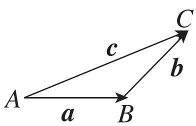
(3)$i^{4n}=1$，$i^{4n+1}=i$，$i^{4n+2}=-1$，$i^{4n+3}=-i$，$i^{4n}+i^{4n+1}+i^{4n+2}+i^{4n+3}=0(n\in\mathbf{N})$.

二、平面向量

1. 平面向量的线性运算

(1)加法：

①三角形法则

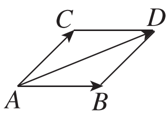


$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ 首尾相连，起点指向终点

与物理的位移相联系

②平行四边形法则

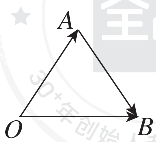


$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$

共起点对角线

与物理的力的合成分解相联系

(2)减法：



$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

与物理的位移相联系

(3)数乘：$\lambda\boldsymbol{a}\begin{cases}\lambda>0 \text{ 时}, \lambda\boldsymbol{a} \text{ 的方向与 } \boldsymbol{a} \text{ 的方向相同},\\ \lambda=0 \text{ 时}, \lambda\boldsymbol{a} \text{ 为零向量},\\ \lambda<0 \text{ 时}, \lambda\boldsymbol{a} \text{ 的方向与 } \boldsymbol{a} \text{ 的方向相反}.\end{cases}$

2. 平面向量基本定理

如果 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内的任一向量 $\boldsymbol{a}$，有且只有一对实数 λ_1,λ_2，使 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$. 若 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线，我们把 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 叫作表示这一平面内所有向量的一个基底.

3. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角

已知两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，$O$ 是平面上的任意一点，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\angle AOB=\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角. 当 $\theta=0$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向；当 $\theta=\pi$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向. 如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是 $\dfrac{\pi}{2}$，我们说 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

4. 平面向量代数坐标运算

若 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，则

(1)加法：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$；

(2)减法：$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$；

(3)数乘：$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1)$；

(4)数量积：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$；

(5)模：$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{x_2^2+y_2^2}$.

5. 平面向量的数量积

(1)若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量，夹角为 θ，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta$.

重要结论：$|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta$ 表示向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量的长度.

(2)设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$.

6. 两个非零向量平行、垂直的充要条件

若 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，则

(1)$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$；

(2)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$.

7. 利用数量积求长度

(1)若 $\boldsymbol{a}=(x,y)$,则 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{x^2+y^2}$.

(2)$|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2\pm2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}$.

(3)若 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

8. 利用数量积求夹角

设 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 为非零向量,若 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$,θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角,

则 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$.

9. 向量计算小题方法

(1)无图背景下的向量计算(小题)

①公式法.

②构图法用几何意义 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$,$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$,$|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{b}|$,$\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}$.

③构图法用坐标来处理.

(2)有图背景下的向量计算(小题)

①直接法.

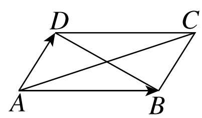
②坐标法.

③分解法.

④投影法:一条不动,一条在动.

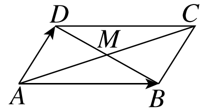
⑤极化恒等式:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{4}[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2]$.

几何解释1(平行四边形模型)



以 AB,AD 为一组邻边构造平行四边形 $ABCD$,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,则 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$,由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{4}[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2]$,得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{4}(AC^2-BD^2)$. 即“从平行四边形一个顶点出发的两个边向量的数量积是和对角线长与差对角线长平方差的$\dfrac{1}{4}$”.

几何解释 2(三角形模型)



在平行四边形模型结论的基础上,若设 M 为对角线的交点,则由 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}(AC^2-BD^2)$ 变形为 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}(AC^2-BD^2)=\frac{1}{4}(4AM^2-4BM^2)$,得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=AM^2-BM^2$,该等式即是极化恒等式在三角形中的体现.

注:隐圆问题以及三角形四心.

设△ABC 中,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$C(x_3,y_3)$.

(i)外心:外接圆圆心为中垂线的交点,满足 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$,则 O 为外心;

(ii)重心:中线的交点满足 $\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{OD}$($D$ 为 BC 的中点),$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$,则重心 O 的坐标为 $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$;

(iii)垂心:垂线的交点;

(iv)内心:内切圆圆心为角平分线的交点.

【易错提醒】

1. 复数 z 为纯虚数的充要条件是 $a=0$ 且 $b\neq0$($z=a+b\mathrm{i}$,$a,b\in\mathbf{R}$).还要注意巧妙运用参数问题和合理消参的技巧.

2. 复数的运算与多项式运算类似,要注意利用 $\mathrm{i}^2=-1$ 化简合并同类项.

3. 若 $\overrightarrow{AP}=\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$($\lambda\in(0,+\infty)$),则点 P 的轨迹过△ABC 的内心.

4. 找向量的夹角时,需把向量平移到同一个起点,共起点容易忽视.

5. 零向量与任何向量垂直,零向量与任何向量平行.